# Existence of group invariant solutions for semilinear elliptic equations

AUTHOR(S):

梶木屋, 龍治

数理解析研究所講究録
973巻 1996年 24-31



# Existence of group invariant solutions for semilinear elliptic equations

長崎総合科学大学　梶木屋 龍治　(Ryuji Kajikiya)

本講演では, 次の楕円型方程式の解の存在について考える。

$$
(1)\qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u(gx) = u(x), & g \in G,\ x \in \Omega, \end{cases}
$$

ただし, $\Omega \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $n \geq 2$, $1 < p < (n+2)/(n-2)$ とする。 $O(n)$ は $n \times n$ 直交行列の全体を表し, $G$ は $O(n)$ の部分群とする。

(1) の解を $G$ invariant solution と呼ぶ。 球対称解は $G$ invariant solution である。 そこで次の問題を考える。

**問題.** $G$ invariant であり, かつ球対称でない解は存在するか。

次の結果が得られた。

**定理 1.** $n \geq 2$, $1 < p < (n+2)/(n-2)$ として, $G$ を $O(n)$ の有限部分群とする。 このとき, 球対称でない (1) の解の列 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ で,

$$
0 < \|u_1\|_{H_0^1(\Omega)} < \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)} < \cdots \nearrow \infty
$$

を満たすものが存在する。 ただし $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ は、ソボレフノルムを表す。

**注意 1.** $p \geq (n+2)/(n-2)$ のときは (1) は 零解しか持たないことが、Pohozaev identity [4] により知られている。

**例 1.** $G = \{e, -e\}$ (ただし, $e$ は単位行列) ととると, 偶関数であり球対称でない (1) の解が無限個存在することがわかる。

**例 2.** 自然数 $m \geq 2$ を固定する。

$$
G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi l}{m} & -\sin\frac{2\pi l}{m} & 0 & \cdots & 0 \\ \sin\frac{2\pi l}{m} & \cos\frac{2\pi l}{m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} : l = 0, 1, 2, \cdots, m-1 \right\}.
$$

このとき (1) の解の列 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ で、各 $u_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が $x_1$, $x_2$ について角度 $\frac{2\pi}{m}$ 回転不変であり、球対称でないものが存在する。

**証明の概略.** 証明は変分法によって行われる。

$$
H_0^1(\Omega, G) \equiv \{u \in H_0^1(\Omega) :\ u(gx) = u(x) \quad ({}^{\forall}g \in G, {}^{\forall}x \in \Omega)\}
$$

$$
I(u) \equiv \int_\Omega \left( \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1} \right) dx, \qquad u \in H_0^1(\Omega, G),
$$

と定義すると, $I(\cdot)$ はヒルベルト空間 $H_0^1(\Omega, G)$ 上の $C^1$ 級の実数値汎関数であり、Palais–Smale 条件を満たす。 また $u(x)$ が (1) の弱解であることと, $u$ が $I'(u) = 0$ をみたすことは同値になる。さらに $1 < p < (n+2)/(n-2)$ のとき、$H_0^1(\Omega)$ に属する弱解は、$C^2$ 級の解になることが楕円型方程式の regularity theory によりわかる。 従って、G invariant であり球対称でないような $I(\cdot)$ の critical point をたくさん探せばよい。 そのためにまず、G invariant な固有値の漸近分布を調べる。

**補題 1.** $G$ を $O(n)$ の有限部分群とする。 次の固有値問題

$$(2) \qquad \begin{cases} -\Delta\phi = \lambda\phi, & x \in \Omega, \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \phi(gx) = \phi(x), & g \in G,\ x \in \Omega, \end{cases}$$

の固有値を $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots$ 重複度も込めて並べる) とする。 このとき, ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して次が成り立つ。

$$c_1 k^{\frac{2}{n}} \le \lambda_k \le c_2 k^{\frac{2}{n}}, \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots).$$

補題 1 の証明のために次の補題を用意する。

**補題 2.** 単位球面を $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| = 1\}$ と書く。$G$ を $O(n)$ の有限部分群として $G = \{g_0, g_1, \cdots, g_m\}$ とする。このとき、ある $\sigma_0 \in S^{n-1}$ が存在して

$$(3) \qquad g_i\sigma_0 \ne g_j\sigma_0 \qquad (i \ne j)$$

が成り立つ。

**証明.** $g \in O(n)$ に対して

$$F(g) = \{\sigma \in S^{n-1} : \ g\sigma = \sigma\}$$

とおくとき、$F(g)$ は $S^{n-1}$ の閉部分集合であり、$g$ が単位行列でないときは、$F(g)$ は、$S^{n-1}$ において内点を持たない。実際にもし内点を持てば、$M = \{x \in \mathbb{R}^n : \ gx = x\}$ は、$\mathbb{R}^n$ において内点を持つ。$M$ は線形空間だから、$M = \mathbb{R}^n$ となり $gx = x$ がすべての $x \in \mathbb{R}^n$ について成り立つ。すなわち $g$ は単位行列になる。

今、$G = \{g_0, g_1, \cdots, g_m\}$ である。$G$ は単位行列を含むので、以下では $g_0$ を単位行列とする。上で示したことにより各 $F(g_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ は $S^{n-1}$ の内点を持たない閉集合である。$S^{n-1}$ は完備距離空間だから Baire のカテゴリー定理により $S^{n-1} \ne \cup_{i=1}^m F(g_i)$ となる。よって

$$(4) \qquad \sigma_0 \in S^{n-1} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} F(g_i)$$

と取ることができる。

今から(3)を示す。ある $i,j$ $(0 \le i,j \le m)$ に対して $g_i\sigma_0 = g_j\sigma_0$ を仮定する。このとき $g_j^{-1}g_i\sigma_0 = \sigma_0$ であり、 $G$ は群だから $g_j^{-1}g_i \in G$ となる。よってある $l$ に対して $g_l = g_j^{-1}g_i$ となり、 $g_l\sigma_0 = \sigma_0$ である。このことと(4)により $l = 0$, $g_l$ は単位行列となり、 $g_i = g_j$ が成り立ち、従って $i = j$ となる。すなわち(3)が示された。 **(補題2の証明終)**

**補題1 の証明.** 点 $x$ 中心で半径 $r$ の球を $B(x,r)$ とかく。

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |x-y| < r\}.$$

補題2で選んだ $\sigma_0$ に対して十分小さな $\varepsilon > 0$ をとると

$$B(g_i\sigma_0, \varepsilon) \cap B(g_j\sigma_0, \varepsilon) = \emptyset \qquad (i \ne j) \tag{5}$$

となる。そこで次のような cone を定義する。

$$C_i = \{\lambda\tau : \ 0 < \lambda < 1, \ \tau \in B(g_i\sigma_0, \varepsilon) \cap S^{n-1}\}.$$

(5)より $C_i \cap C_j = \emptyset$ $(i \ne j)$ であり、各 $g_i$ は直行行列だから $g_iC_0 = C_i$ となる。今 $u \in H_0^1(C_0)$ のとき

$$\begin{cases} \tilde{u}(g_ix) = u(x) & (x \in C_0, \ i = 1, \cdots, m) \\ \tilde{u}(x) = 0 & (x \notin \bigcup_{i=0}^m C_i) \end{cases}$$

として $\tilde{u}$ を定義すれば $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega, G)$ である。そこで、

$$\tilde{H}_0^1(C_0) = \{\tilde{u} : \ u \in H_0^1(C_0)\}$$

とおくと

$$\tilde{H}_0^1(C_0) \subset H_0^1(\Omega, G) \tag{6}$$

である。

ところで(2)の固有値は、以下のようにして特徴づけられる。まず $u_1, \cdots, u_k \in H_0^1(\Omega, G)$ のとき

$$d(u_1, \cdots, u_k) = \inf\{\frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2} : \ u \in H_0^1(\Omega, G), \quad (u, u_i)_{L^2} = 0 \quad (i = 1, \cdots, k)\} \tag{7}$$

として $d(u_1, \cdots, u_k)$ を定義する。ただし $(u,v)_{L^2}$ は $u, v$ の $L^2$ 内積を表す。このとき(2)の固有値 $\lambda_k$ は

$$\lambda_k = \sup\{d(u_1, \cdots, u_k) : \ u_1, \cdots, u_k \in H_0^1(\Omega, G)\} \tag{8}$$

となる([1]参照)。上の定義(7),(8)において $H_0^1(\Omega, G)$ を $\tilde{H}_0^1(C_0)$ に代えたものをそれぞれ $\tilde{d}$, $\tilde{\lambda}_k$ とすれば(6)より

$$\lambda_k \le \tilde{\lambda}_k \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{9}$$

となる。$\tilde{\lambda}_k$ は、$C_0$での Dirichlet Laplacian

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \tilde{\lambda}\phi, & x \in C_0, \\ \phi = 0, & x \in \partial C_0, \end{cases}$$

の第$k$固有値だから、ある $c > 0$ をとると

$$\tilde{\lambda}_k \leq ck^{\frac{2}{n}} \tag{10}$$

が成り立つ([1])。(9), (10) により $\lambda_k \leq ck^{\frac{2}{n}}$ が得られる。

$\lambda_k$ の下からの評価はもっと簡単である。$H_0^1(\Omega, G) \subset H_0^1(\Omega)$ であるから、定義 (7),(8) において $H_0^1(\Omega, G)$ を $H_0^1(\Omega)$ に代えたものをそれぞれ $e(u_1, \cdots, u_k)$, $\mu_k$ とすれば $\mu_k \leq \lambda_k$ であり $\mu_k$ は

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \mu\phi, & x \in \Omega, \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

の第 $k$ 固有値だから、ある $c_0 > 0$ をとると $c_0 k^{\frac{2}{n}} \leq \mu_k$ が成り立つ。よって $c_0 k^{\frac{2}{n}} \leq \lambda_k$ が得られる。 **(補題 1 の証明終)**

次に G invariant critical values を構成するが、その前に genus を定義する。

**定義 1.** $H_0^1(\Omega, G)$ の閉部分集合 $A$ で、$0 \notin A$ であり、$u \in A$ ならば $-u \in A$ を満たすもの全体を $Sym(H_0^1(\Omega, G))$ と書く。

$$Sym(H_0^1(\Omega, G)) \equiv \{A : \ A \text{ is closed in } \ H_0^1(\Omega, G), 0 \notin A, u \in A \text{ implies } \ -u \in A\}$$

$A \in Sym(H_0^1(\Omega, G))$ に対して

$$\gamma(A) = \min\{m : \ A\text{から}\mathbb{R}^m \setminus \{0\}\text{への連続な奇関数が存在する。}\}$$

として $\gamma(A)$ を定義して、これを $A$ の genus と呼ぶ([5, p45] 参照)。もしどのような自然数 $m$ に対しても $A$ から $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ への連続な奇関数が存在しないとき、$\gamma(A) = \infty$ と定義し、空集合 $\emptyset$ に対しては、$\gamma(\emptyset) = 0$ と定義する。

補題 1 を利用して次の補題 3 が示される。
**補題 3.** 次の条件を満たす実数列 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する。

(i) $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots \nearrow \infty$.

(ii) $\alpha_k = \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_{k+j}$ ならば $\gamma(K) \geq j + 1$ である。ただし

$$K = \{u \in H_0^1(\Omega, G) : I(u) = \alpha_k, \ I'(u) = 0\}$$

(iii) 各 $\alpha_k$ は、$I(\cdot)$ の critical value である。すなわち、各 $\alpha_k$ に対して、$I(u_k) = \alpha_k$, $I'(u_k) = 0$ をみたす $u_k$ $(\in H_0^1(\Omega, G))$ が存在する。

(iv) ある $c>0$ が存在して、$\alpha_k \le ck^{\frac{2(p+1)}{n(p-1)}}$ $(k=1,2,3,\cdots)$ が成り立つ。

**証明.** (2) の固有値を重複度も込めて小さい方から順に並べて $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(0<\lambda_1<\lambda_2\le\lambda_3\le\cdots)$ とする。 $\lambda_k$ に対応する固有関数を $\phi_k$ とかく。

$$E=H_0^1(\Omega,G), \qquad E_k=span\{\phi_1,\cdots,\phi_k\}$$

とする。以降 $\|\cdot\|_q$ は $L^q$ ノルムを表し、添え字無しのノルム $\|\cdot\|$ は、$H_0^1(\Omega,G)$ ノルムを表す。すなわち、$\|u\|=\|u\|_{H_0^1(\Omega,G)}=\|\nabla u\|_2$. このとき、各自然数 $k$ に対して、ある $R_k>0$ が存在して

$$I(u)\le 0 \qquad (\|u\|\ge R_k,\ \ u\in E_k) \tag{11}$$

が成り立つ。これを示すには、$E_k$ が有限次元ノルム空間だから、ノルム $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ と $\|\cdot\|_{L^{p+1}}$ が同値になることを使う。$(1<p<(n+2)/(n-2)$ に注意。) すなわち、

$$^{\exists}c_1(k),c_2(k)>0:\ c_1\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\le\|u\|_{L^{p+1}}\le c_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad (u\in E_k)$$

ゆえに

$$I(u)\le\frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2-\frac{c_1^{p+1}}{p+1}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1}$$

よって $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\ge((p+1)/(2c_1^{p+1}))^{1/(p-1)}$ のとき $I(u)\le 0$ となり (11) が成り立つ。(11) の $R_k$ は $0<R_1<R_2<R_3<\cdots\nearrow\infty$ としてよい。補題 3 を示すには、以下のようにして $\alpha_k$ を定義すればよい。

$$D_k=\{u\in E_k:\ \|u\|\le R_k\}$$

$$\Gamma_k=\{h:\ h\text{は}D_k\text{から}E\text{への連続な奇関数で、}\|u\|=R_k\text{のとき}h(u)=u\text{を満たす.}\}$$

$$\alpha_k=\inf_{h\in\Gamma_k}\max_{u\in D_k}I(h(u)) \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

とおく。このとき補題 3 の (i)、(ii)、(iii) が成り立つことは [5, Theorem 9.12] を見よ。(iv) を示す。 $\alpha_k$ の定義において、$h\in\Gamma_k$ として特に 恒等写像 $h_0(u)\equiv u$ をとると $h_0\in\Gamma_k$ であり、

$$\alpha_k\le\max_{u\in D_k}I(h_0(u))=\max_{u\in D_k}I(u)\le\sup_{u\in E_k}I(u) \tag{12}$$

となる。今 $\Omega$ が有界領域だから

$$^{\exists}c>0: \qquad \|u\|_2\le c\|u\|_{p+1} \qquad (u\in L^{p+1}(\Omega))$$

が成り立つ。また $E_k$ の定義より

$$\|\nabla u\|_2^2\le\lambda_k\|u\|_2^2 \qquad (u\in E_k)$$

が成り立つ。上の二式を合わせて、

$$c\lambda_k^{-\frac{p+1}{2}}\|\nabla u\|_2^{p+1} \le \|u\|_{p+1}^{p+1} \qquad (u \in E_k)$$

が得られる。ここで $c$ は、$u, k$ に無関係である。よって

$$I(u) \le \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - c\lambda_k^{-\frac{p+1}{2}}\|\nabla u\|_2^{p+1} \qquad (u \in E_k) \tag{13}$$

が成り立つ。関数 $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - c\lambda_k^{-\frac{p+1}{2}}t^{p+1}$ の $t \ge 0$ での最大値は、$c_0\lambda_k^{(p+1)/(p-1)}$ である。ただし、

$$c_0 = \frac{p-1}{2(p+1)}\left\{\frac{1}{c(p+1)}\right\}^{2/(p-1)}$$

である。この事と (12)、(13) より

$$\alpha_k \le c_0\lambda_k^{\frac{p+1}{p-1}}$$

が導かれる。この式と補題 1 より補題 3 の (iv) が得られる。 **(補題 3 の証明終)**

補題3で多くの G invariant critical values が得られた。今から、球対称解について調べる。

**補題 4.** (1) の球対称解でちょうど $k$ 個の零点を持ち $u(0) > 0$ を満たすものがただ 1 つ存在する。 それを $v_k$ と書くと, (1) のすべての球対称解の集合は

$$\{v_k : k = 1, 2, \cdots\} \cup \{-v_k : k = 1, 2, \cdots\} \cup \{0\}$$

である。 $\beta_k = I(v_k) = I(-v_k)$ とおくと次が成り立つ。

(i) $0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \cdots \nearrow \infty$.

(ii) $I(v_k) = \beta_k, \quad I'(v_k) = 0$.

(iii) $^\exists A, ^\exists B > 0 :\ Ak^{\frac{2(p+1)}{p-1}} \le \beta_k \le Bk^{\frac{2(p+1)}{p-1}} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$.

**証明.** (1) の球対称解 $u = u(r), r = |x|$ の満たす方程式は、

$$u'' + \frac{n-1}{r}u' + |u|^{p-1}u = 0, \qquad r \in (0, 1), \tag{14}$$

$$u'(0) = u(1) = 0 \tag{15}$$

となる。(14) と初期条件

$$u'(0) = 0,\ u(0) = 1 \tag{16}$$

を満たす解は一意に存在し、$r \in [0, \infty)$ まで延長される。これを $w(r)$ と書く。このとき $w(r)$ は、非有界な零点の列を持つ。小さい方から順に $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$ とする。今、変換 $\lambda^{2/(p-1)}w(\lambda r)$ $(\lambda > 0)$ は、方程式 (14) を不変にすることがわかる。そこで

$$v_k(r) \equiv s_k^{2/(p-1)}w(s_k r)$$

とおくと、この $v_k$ が(14)–(15)の解であり、(i), (ii) を満たす。しかも $u(0) > 0$ を満たし区間 $[0,1]$ にちょうど $k$ 個の零点を持つ(14)–(15)の解は $v_k$ のみであることもわかる(詳細は[2,p263]を見よ)。(iii)の証明は(14)を次の一階常微分方程式系

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\dfrac{n-1}{r}v - |u|^{p-1}u \end{cases}$$

になおし、これに対して非線形Prüfer 変換を使うことによりなされる。(詳細は[2,3]を参照)

**(補題4の証明終)**

**定理 1の証明.** $\{\alpha_k\}$ は $G$ invariant critical value の集合であり、一方 $\{\beta_k\}$ は**すべての**球対称 critical value の集合であることに注意する。直感的には、$\{\alpha_k\} \setminus \{\beta_k\}$ が非有界集合であることを示して、これを $\{\gamma_k\}$ とおけば、$\gamma_k$ に対する critical value として定理 1 の $u_k$ が得られる。厳密には、以下のようにする。

定理1を否定する。その結果、ある $k_0$ が存在して $k \geq k_0$ のとき $\alpha_k$に対する critical point は球対称解のみとなる。すなわち

$$\{\alpha_k:\ k \geq k_0\} \subset \{\beta_k:\ k = 1,2,3,\cdots\}. \tag{17}$$

もし、ある $k(\geq k_0)$ と、ある自然数 $j$ に対して$\alpha_k = \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_{k+j}$ ならば補題3より $\gamma(K) \geq j+1$ である。ただし、

$$K = \{u \in H_0^1(\Omega, G):\ I(u) = \alpha_k,\ I'(u) = 0\}$$

である。

一方 (17) より、ある $l$ が存在して $\alpha_k = \beta_l$ であり、これに対する critical point は、球対称解のみなので$K = \{v_l,\ -v_l\}$ となる。genus の定義より有限集合 $K$ の genus は $\gamma(K) = 1$ となるので、$\gamma(K) \geq j+1$ に矛盾する。よって $\alpha_k < \alpha_{k+1} \quad (k \geq k_0)$ となる。これと(17)より、ある自然数の列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ $(n_1 < n_2 < \cdots)$ が存在して、

$$\alpha_{k_0+j} = \beta_{n_j} \qquad (j = 1,2,3,\cdots)$$

よって補題3 (iv) と補題4 (iii) により

$$An_j^{\frac{2(p+1)}{p-1}} \leq c(k_0+j)^{\frac{2(p+1)}{n(p-1)}}$$

$\{n_j\}$ は狭義単調増加な自然数列だから $j \leq n_j$ となり、

$$Aj^{\frac{2(p+1)}{p-1}} \leq c(k_0+j)^{\frac{2(p+1)}{n(p-1)}} \qquad (j = 1,2,3,\cdots).$$

となる。これは $n \geq 2$ に反する。こうして定理1の否定から矛盾が生じるので定理1は、正しいことがわかる。

**(定理1の証明終)**

# 参考文献

[1] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics. Vol. I. II, New York, Interscience 1953, 1962.

[2] R. Kajikiya, Sobolev norms of radially symmetric oscillatory solutions for superlinear elliptic equations, Hiroshima Math. J. 20 (1990), 259–276.

[3] R. Kajikiya, Radially symmetric solutions of semilinear elliptic equations, existence and Sobolev estimates, Hiroshima Math. J. 21 (1991), 111–161.

[4] S. I. Pohozaev, Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Dokl. 5 (1965), 1408–1411.

[5] P. H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, CBMS Regional Conference Series in Math. 65, Amer. Math. Soc.1984.